Geometrie

Winkel in Dreiecken und Vierecken

Datei Nr. 11105

Stand: 6. März 2019

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

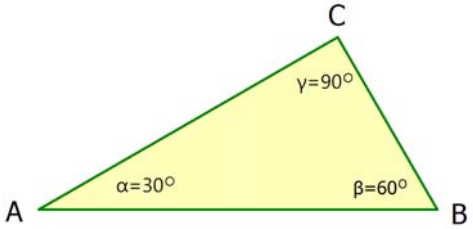
Inhalt

1	**Winkel im Dreieck**	3
	Experimenteller Beweis: Winkelsumme im Dreieck	4
	Zusammenfassung über Dreieckswinkel	7
2	Spezielle Dreiecke	9
3	Mittelsenkrechte einer Strecke	11
4	Winkelhalbierende	13
5	Winkel in Vierecken	14

1 Winkel im Dreieck

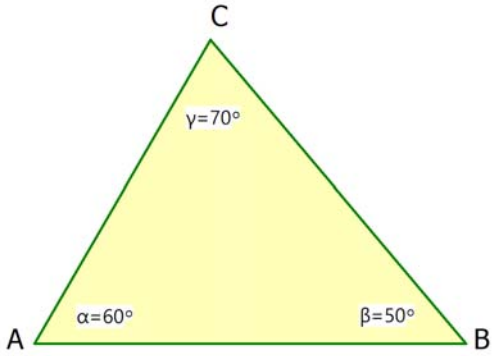
Wenn man die sogenannten Innenwinkel im Dreieck misst, stellt man folgendes fest:

Beispiel 1:



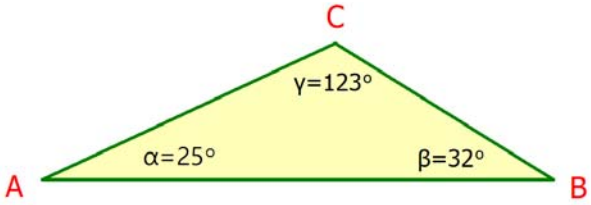
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{O}$$

Beispiel 2:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{O}$$

Beispiel 3:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{O}$$

MERKE:

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt IMMER 180°.

Diesen Satz sollte man im Unterricht beweisen.

Dazu habe ich mir ein Spiel überlegt, das man an der Tafel oder noch besser auf einem Tisch durchführen kann. Dazu benötigt man eine Schienenbahn in Form eines Dreieck, und ein Spielzeugauto. Damit führt man ein kleines Experiment durch.

Am Ende erkennt man, dass die Winkelsumme eben 180° beträgt.

Klaus und seine Autobahn

Klaus ist 5 Jahre alt und besitzt eine Autobahn, die er zu einem Dreieck zusammengesteckt hat. Dabei haben sich die eingetragenen Winkel ergeben.

Das 1. Spiel:

Klaus startet mit seinem Auto in A und schiebt es nach B. Dort dreht er das Auto so, dass es in Fahrtrichtung C steht. Dann schiebt er es nach C und dreht es dort so, dass es in Fahrtrichtung A steht. Schließlich schiebt er es nach A und dreht es dort wieder so, dass es in Fahrtrichtung C steht.
Es hat dann wieder seine Ausgangsposition erreicht.

Wichtig zu wissen ist, dass Klaus sein Auto hier gegen den Uhrzeigersinn dreht – er will ja einmal Mathematiker werden …

Die erste Frage lautet:

Um wie viel Grad hat er sein Auto im Punkt B gedreht?

Notiere Deine Antwort!

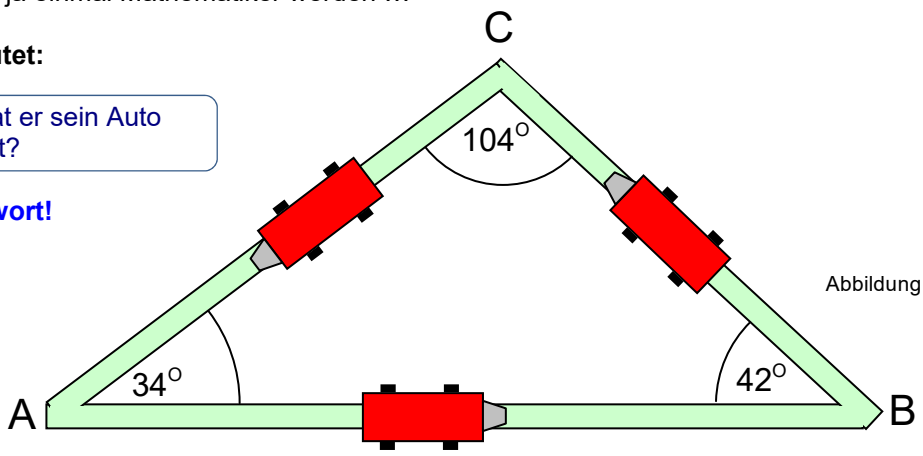


Abbildung 1

Zur Lösung müssen wir den Drehvorgang in der Ecke B genau ansehen.

In Abbildung 2 kommt das Auto in B an. Wir nehmen es nun in Gedanken in die Hand und drehen es so gegen den Uhrzeigersinn, dass es in Fahrtrichtung C steht.

Wie man sieht, verwendet man dann den Nebenwinkel zu $\beta = 42^\circ$ für die Drehung, also wurde das Auto um $\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$ gedreht.

Das zeigt Abbildung 3.

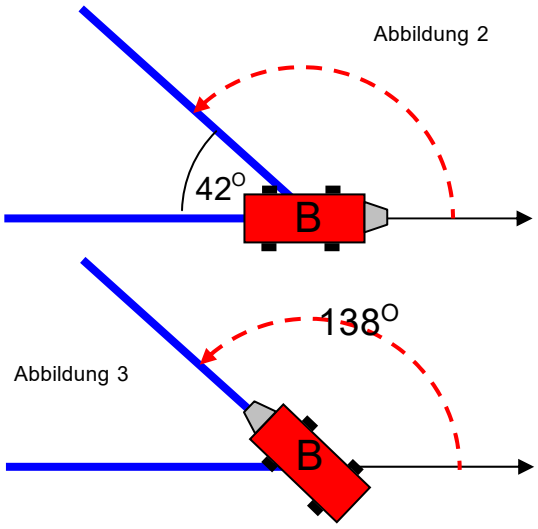


Abbildung 2

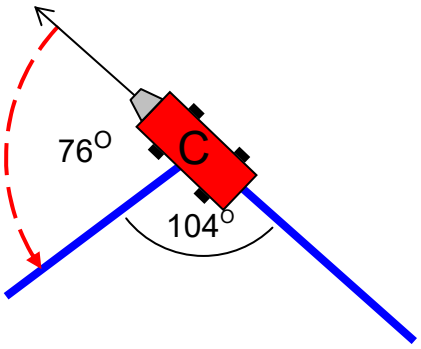
Abbildung 3

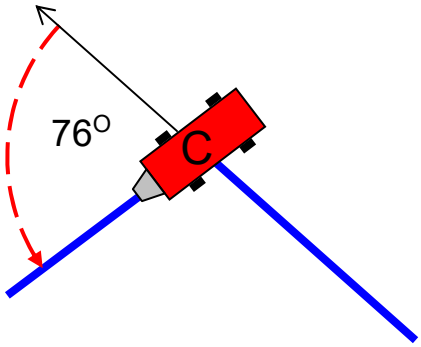
Hinweis: Die falsche Antwort wäre also: Er hat das Auto um 42° gedreht.

Nun zu deiner Aufgabe:

Finde heraus, um wie viel Grad das Auto in C und in A gedreht worden ist.
Um wie viel Grad hat dann Klaus sein Auto bei einer ganzen Rundreise gedreht?

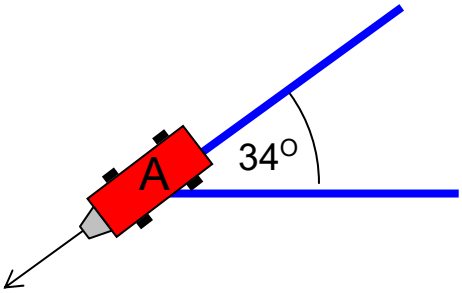
Hier die Lösung: Dazu sehen wir uns die Drehung in C an:

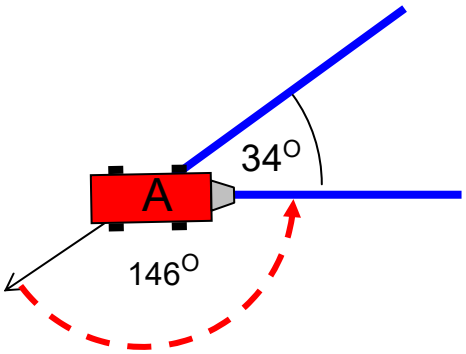




Das Auto erreicht C und wird um den Nebenwinkel von $\gamma = 104^\circ$,
also um $\gamma' = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$ gedreht.

Nun erreicht es den Punkt A und wird dort um den Nebenwinkel von $\alpha = 34^\circ$,
also um $\alpha' = 180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$ gedreht.





Nun addieren wir die Drehwinkel:

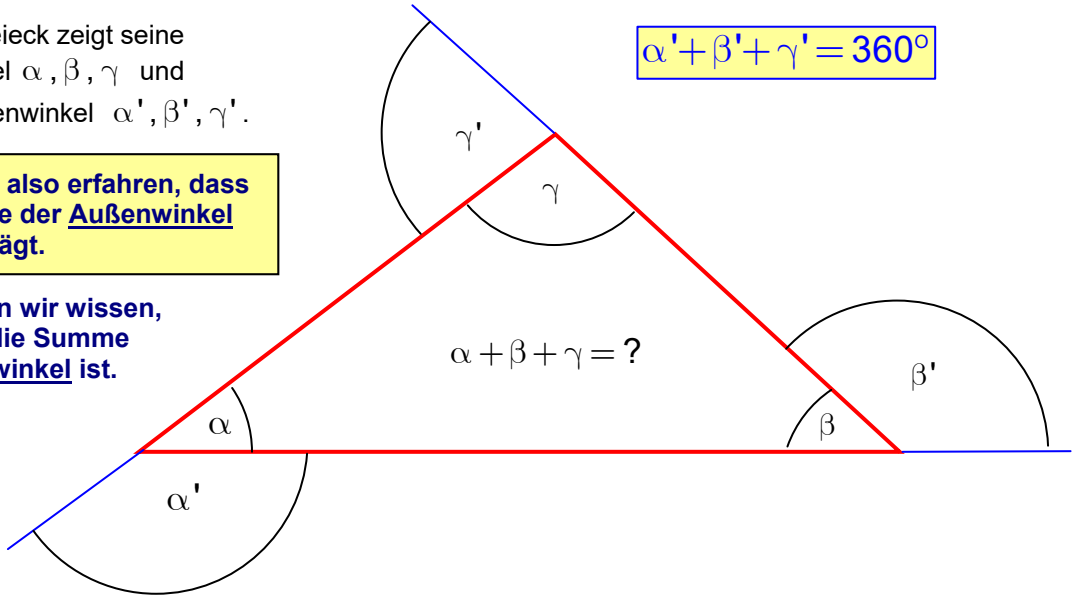
$$138^\circ + 76^\circ + 146^\circ = 360^\circ .$$

Wer nachdenkt statt zu rechnen kommt auf dasselbe Ergebnis:
Das Auto hat sich genau einmal gedreht. Es steht wieder in der Ausgangsrichtung,
hat also eine Volldrehung um 360° durchgeführt.

Dieses Dreieck zeigt seine Innenwinkel α, β, γ und seine Außenwinkel α', β', γ'.

Wir haben also erfahren, dass die Summe der <u>Außenwinkel</u> 360° beträgt.

Nun wollen wir wissen, wie groß die Summe der <u>Innenwinkel</u> ist.

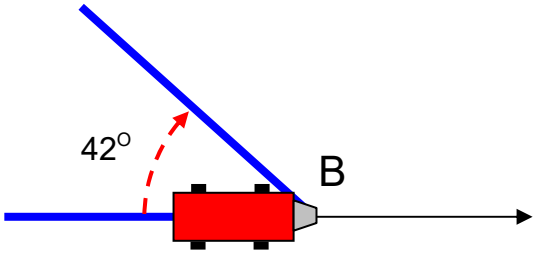


2. Spiel:

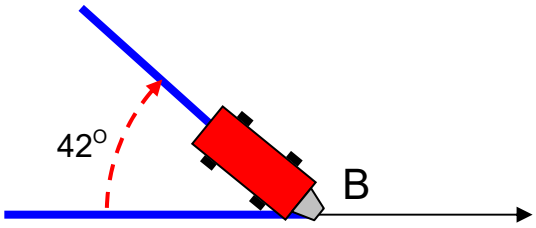
Dazu müssen wir wieder mit unserer Fahrbahn spielen, aber an den Ecken anders drehen.

Beginnen wir mit der Ecke B, auf die wir als erste zufahren.

Bei der zuletzt besprochenen Fahrt von A über B nach C musste sich das Auto gegen den Uhrzeigersinn um 138° drehen, damit es vorwärts in Richtung C fahren konnte.

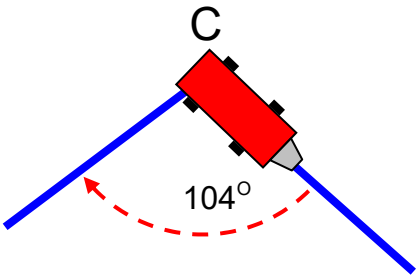


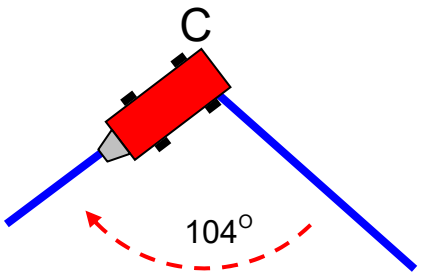
Nun soll es sich um den Winkel 42° drehen. Das geht nur im Uhrzeigersinn, und anschließend steht das Auto rückwärts auf der Fahrbahn.



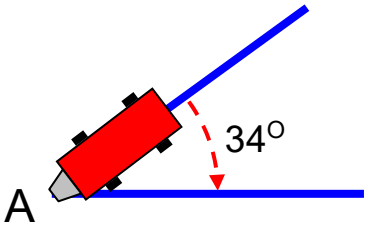
Es muss also rückwärts nach C geschoben werden.

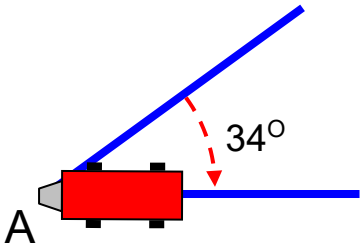
Genau so geht es nun in C weiter:





Man erkennt: Dreht man das Auto in C um 104° im Uhrzeigersinn, dann steht es anschließend wieder in Fahrtrichtung A und kann vorwärts weiterfahren.
Nun drehen wir es zum letzten Mal in A:





Wir erhalten das überraschende Ergebnis: Am Ende, also nach einer Umfahrung der Bahn´, steht das Auto bei dieser Art zu fahren, also bei Drehung um die Innenwinkel des Dreiecks in entgegengesetzter Fahrtrichtung auf der Strecke AB.

Die ganze Fahrt hat das Auto also insgesamt um 180° gedreht.
Dies können wir zahlenmäßig überprüfen: $42^{\circ} + 34^{\circ} + 104^{\circ} = 180^{\circ}$.

Es wird schnell klar, dass dies für alle anderen Dreiecke auch gilt:

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}}$$

Merke: **Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°.**

Zusammenfassung über Dreieckswinkel:

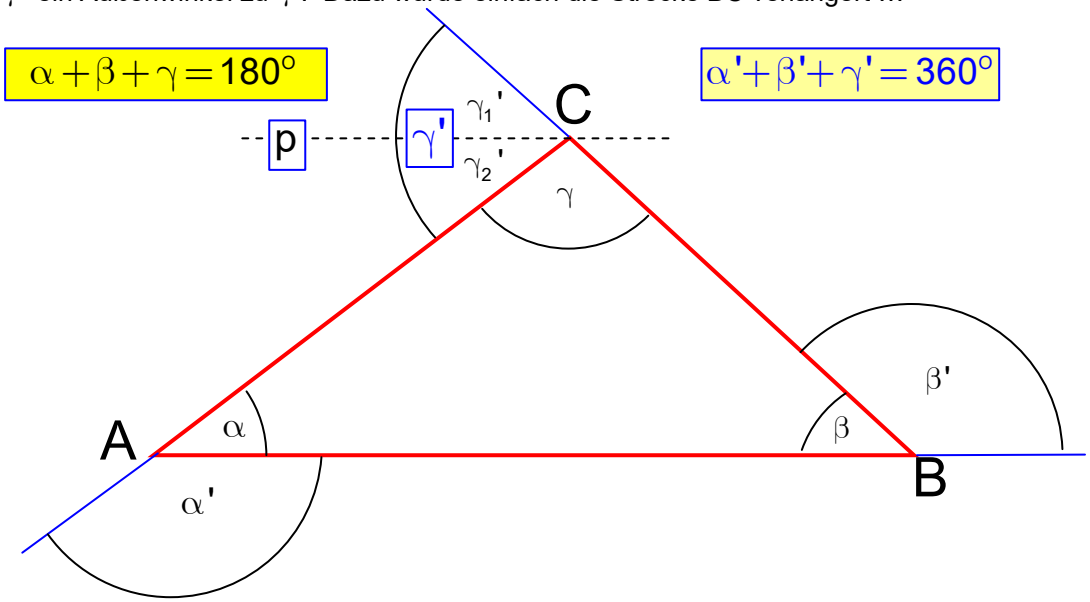
1. Im Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.

2. Die Summe der Außenwinkel im Dreieck beträgt 360°.

Es gibt eine weitere Eigenschaft:

3. Jeder Außenwinkel ist so groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

Hier ist γ' ein Außenwinkel zu γ. Dazu wurde einfach die Strecke BC verlängert …



Beweis: Zeichnet man eine Parallele p zur Grundseite AB, dann wird dadurch der Außenwinkel γ in zwei Teilwinkel γ_1' und γ_2' zerlegt, so dass gilt

$$\gamma_1'+\gamma_2'=\gamma'.$$

γ_1' und β sind Stufenwinkel, also gleich groß: $\gamma_1'=\beta$.

γ_2' und α sind Wechselwinkel und somit gleich groß: $\gamma_2'=\alpha$.

Nun addieren wir und erhalten $\gamma'=\underbrace{\gamma_1'}_{=\beta}+\underbrace{\gamma_2'}_{=\alpha}=\alpha+\beta$,

was zu beweisen war.

Dieselbe Methode wendet man, um die beiden anderen Formeln zu beweisen: $\alpha'=\beta+\gamma$ und $\beta'=\alpha+\gamma$.

Diesen kleinen Beweis sollte man lernen und selbst nachvollziehen können.
Wozu? Das schult das logische geometrische Denken.

Übungen dazu

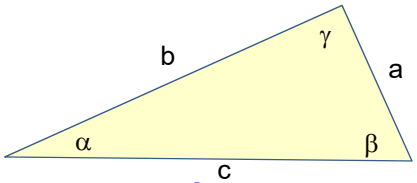
Die Lösung steht auf der letzten Seite.

1.) In einem Dreieck sind diese Winkel gegeben: $\alpha = 73^{O}$ und $\gamma = 42^{O}$.
Zeichne ein geeignetes Dreieck damit (Seiten beliebig).
Berechne β und die drei Außenwinkel.

2.) In einem Dreieck sind diese Winkel gegeben: $\gamma = 43{,}2^{O}$ und $\beta = 102{,}7^{O}$.
Zeichne ein geeignetes Dreieck damit (Seiten beliebig).
Berechne α und die drei Außenwinkel.

2 Spezielle Dreiecke

2.1 Rechtwinklige Dreiecke



<u>In diesem Fall</u> ist $\gamma = 90^O$.

Weil die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, gilt dann: $\alpha + \beta = 90^O$

Bei rechtwinkligen Dreiecken gibt es für die Seiten spezielle Namen:

Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt heißt: **Hypotenuse.**

Die beiden Seite, die den rechten Winkel bilden heißen: **Katheten.**

Von α aus gesehen nennt man b die **Ankathete**

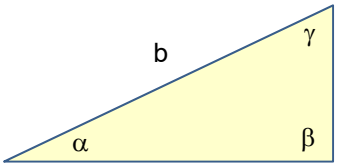
und a die **Gegenkathete**.

(weil a gegenüber von α liegt.)

Bei einer andren Bezeichnung der Winkel und Seiten, muss man dies natürlich anpassen:

Hier gilt $\alpha + \gamma = 90^O$

Hypotenuse ist jetzt die Seite b usw.

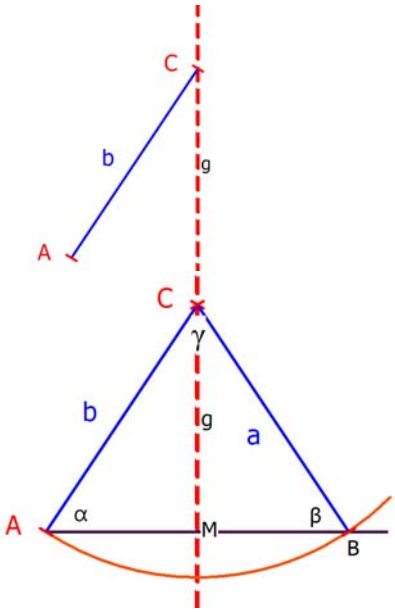


2.2 Gleichschenklige Dreiecke

Spiegelt man die Strecke AC an der Geraden g, dann entsteht ein gleichschenkliges Dreieck:

Bei dieser Spiegelung bleibt C unverändert, weil er auf der Achse liegt („Fixpunkt“).

Um A zu spiegeln, fällt man das Lot von A auf g und überträgt den Abstand z. B. durch einen Kreisbogen.



Durch die Spiegelung wird klar, dass a = b ist, (daher heißt das Dreieck „gleichschenklig) und auch $\alpha = \beta$.

Die Gerade g steht senkrecht auf der Strecke AB (Grundseite) und halbiert sie. g ist daher die Mittelsenkrechte zu AB und die Symmetrieachse des Dreiecks.

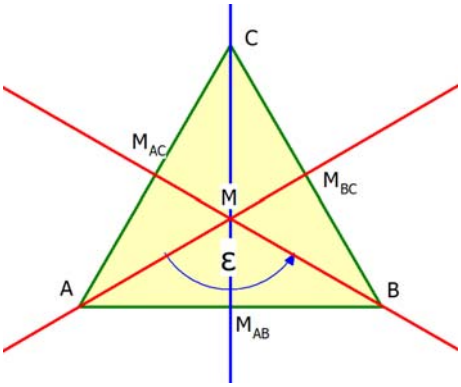
Wegen $\alpha = \beta$ gilt noch diese Beziehung:

$$\alpha + \alpha + \gamma = 180 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha + \gamma = 180 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha = 180^O - \gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^O - \tfrac{1}{2}\gamma$$

Oder $\gamma = 180^O - 2\alpha$.

Konstruktionsbeispiele zu gleichschenkligen Dreiecken stehen in Texte 11111.

2.3 Gleichseitige Dreiecke



Wenn alle drei Seiten gleich lang sind, dann ist es dreifach gleichschenklig. Das heißt, dass alle drei Lotgeraden von den Ecken auf die Gegenseiten diese halbieren.
Also folgt wie beim gleichschenkligen Dreieck, dass $\alpha = \beta = \gamma$.
Daher hat jeder dieser Winkel 60°.

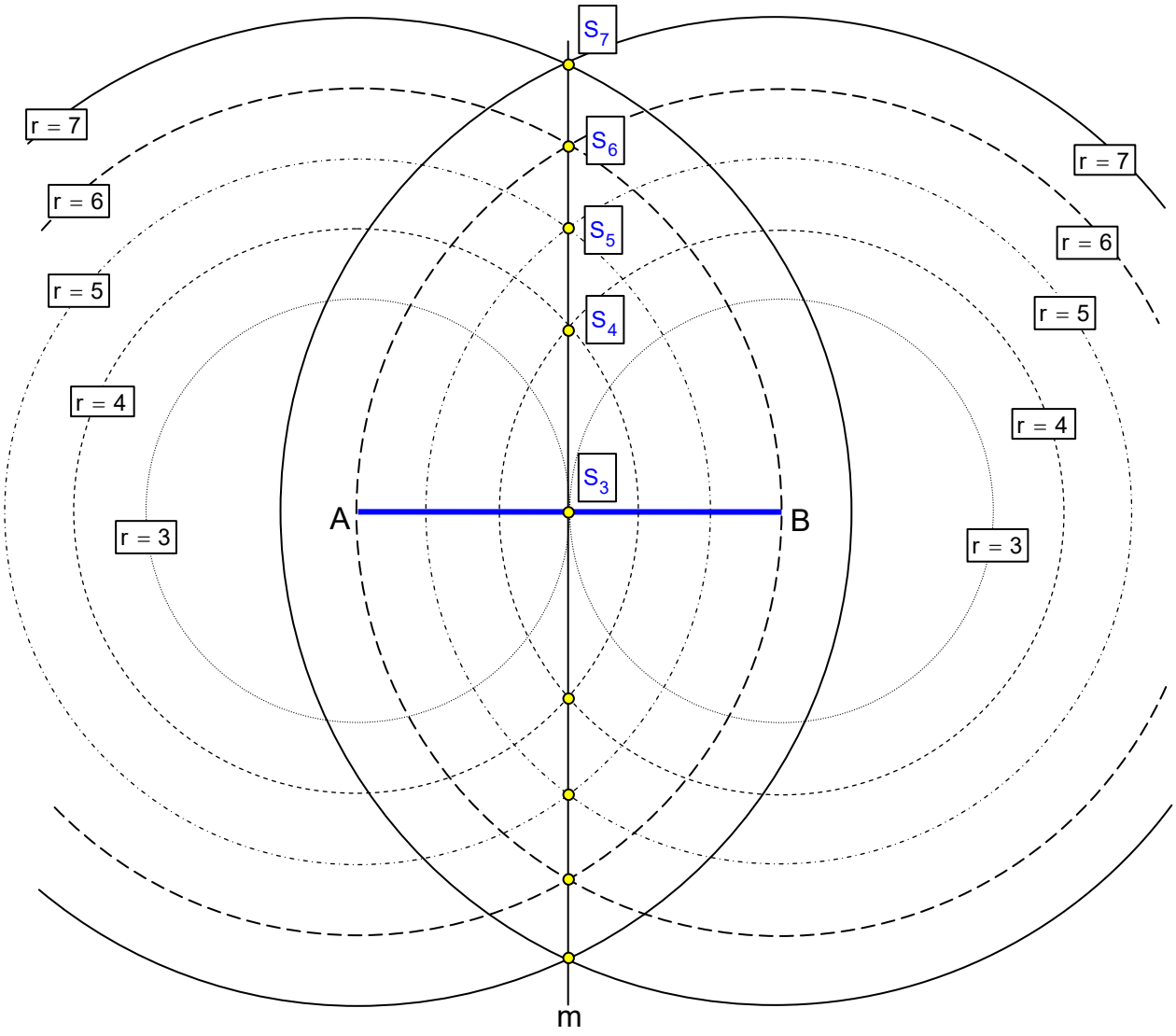
Weil jede dieser Mittelsenkrechten auch die Winkel an den Eckpunkten halbieren, folgt
Im Teildreieck ABM betragen die Winkel bei A und B jeweils 30°, zusammen also 60°.
Daher hat der Mittelpunktwinkel ε bei M genau 120°.

Dies kann man auch so herausfinden: Der Vollwinkel bei M wird durch die Strecken MA, MB und MC in drei gleiche Teile geteilt!

3 Mittelsenkrechte einer Strecke

Gegeben ist eine Strecke AB = 6 cm. Zeichne um A und B Kreise mit gleichen Radien.

Verwende dazu die Radien 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm und 7 cm.



Man beobachtet folgendes:

1. Ab dem Radius 3 schneiden sich die Kreise um A und um B zweimal. Die oberhalb von AB liegenden Punkte habe ich beschriftet. So bedeutet S_6 , dass sich dort die beiden Kreise mit Radius 6 (cm) schneiden.

2. Die Kreise mit dem Radius 3 (cm) berühren sich im Mittelpunkt der Strecke AB.

3. Alle Schnittpunkte der Kreise mit gleichen Radien liegen auf der Geraden m.

   Diese steht senkrecht auf AB und geht durch deren Mittelpunkt.

Daher heißt m die Mittelsenkrechte der Strecke AB.

Wir denken weiter über diese Abbildung nach:

Der Punkt S_7 ist von A und B gleich weit entfernt: $\overline{AS_7} = \overline{BS_7} = 7\,(\text{cm})$.

Der Punkt S_6 ist von A und B gleich weit entfernt: $\overline{AS_6} = \overline{BS_6} = 6\,(\text{cm})$.

Der Punkt S_5 ist von A und B gleich weit entfernt: $\overline{AS_5} = \overline{BS_5} = 5\,(\text{cm})$.

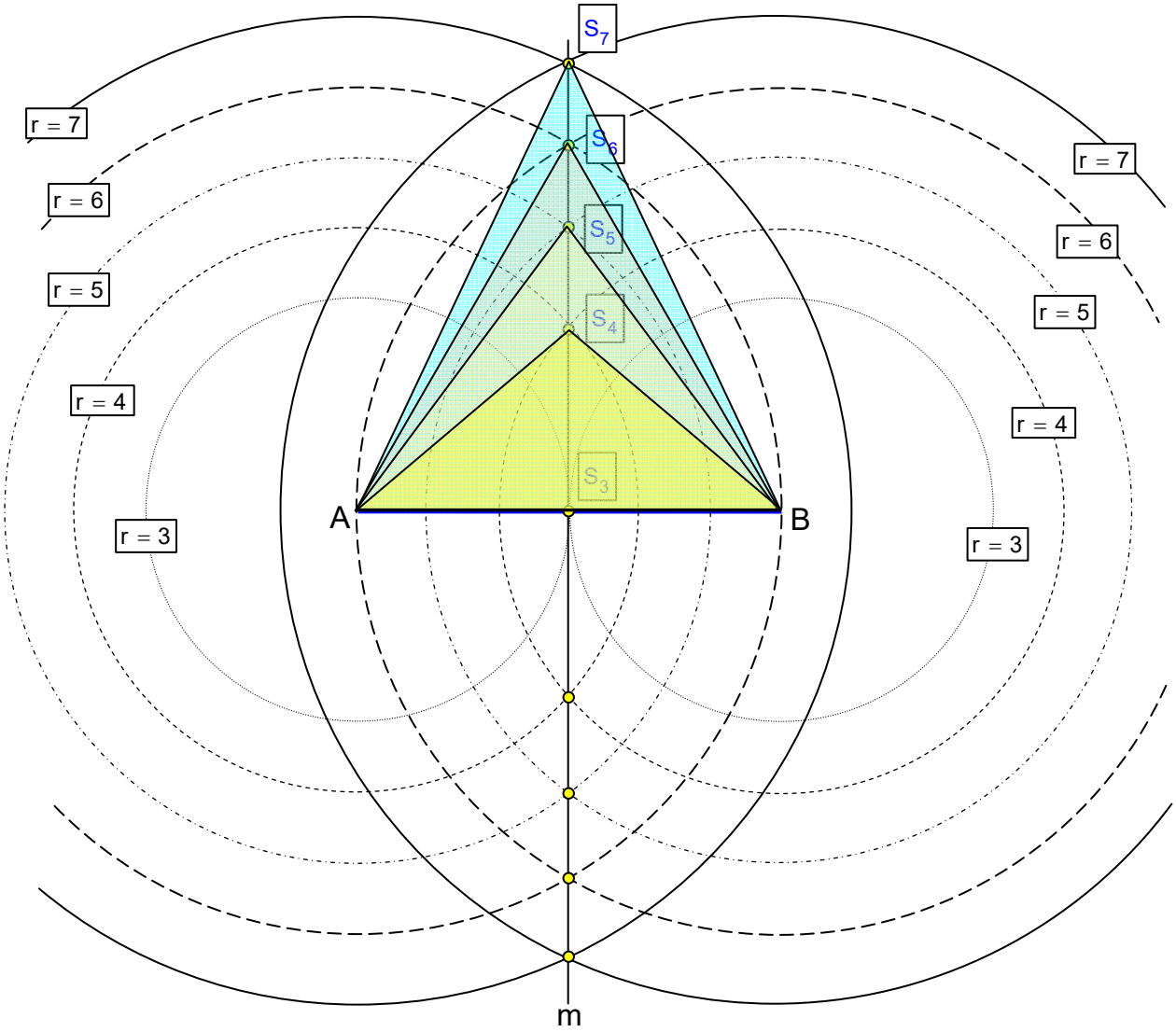
Der Punkt S_4 ist von A und B gleich weit entfernt: $\overline{AS_4} = \overline{BS_4} = 4\,(\text{cm})$.

Der Punkt S_3 ist von A und B gleich weit entfernt: $\overline{AS_3} = \overline{BS_3} = 3\,(\text{cm})$.

Verbindet man also diese S-Punkte mit A und B, entstehen Dreiecke mit zwei gleich langen Seiten, man nennt sie **gleichschenklige Dreiecke**.

Man kann also festhalten:

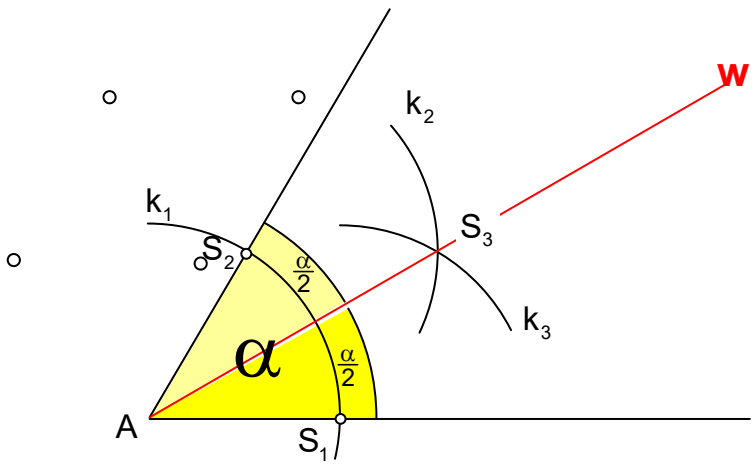
> Alle Punkte der Mittelsenkrechten der Strecke AB haben die Eigenschaft, dass ihre Entfernung zu A und zu B gleich groß ist.



4 Winkelhalbierende

Eine Linie, welche einen Winkel halbiert und durch den Scheitel geht, heißt Winkelhalbierende dieses Winkels.

Konstruktion einer Winkelhalbierenden mit dem Zirkel:



Konstruktionstext:

1. Zeichne den zu halbierenden Winkel.

2. Zeichne ein Kreisbogen k_1 um seinen Scheitel.
   Dieser schneidet seine beiden Schenkel in zwei Punkten S_1 und S_2.

3. Zeichne um S_1 und S_2 Kreisbögen k_2 und k_3 mit gleichem Radius (*Dieser kann gleich groß sein wie der erste Radius, muss aber nicht).* Sie schneiden sich in S_3.

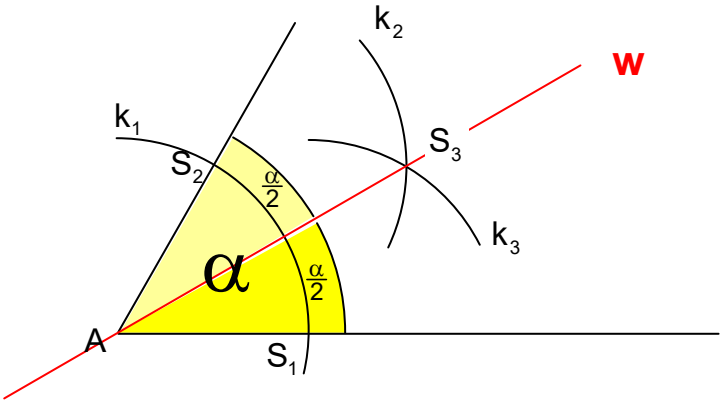
4. Die Gerade $w = (AS_3)$ halbiert den gegebenen Winkel.

Hinweise:

Ich habe die Winkelhalbierende als <u>Halbgerade</u> gezeichnet, genau wie auch die beiden Schenkel des Winkels).

Man kann aber auch <u>eine Gerade</u> daraus machen, indem man sie über A hinaus zeichnet:

Eine Winkelhalbierende kann aber auch <u>eine Strecke</u> sein, etwa dann, wenn der Winkel zu einem Dreieck gehört. Dann lässt man die Winkelhalbierende an der Gegenseite enden.

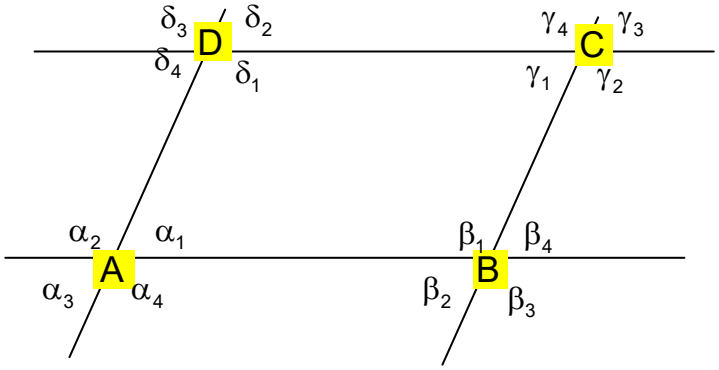


5 Winkel in Vierecken

3.1 Wenn sich zwei Paare paralleler Geraden schneiden, entsteht ein Viereck, das man **Parallelogramm** nennt. Oder anders formuliert: Ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel sind, heißt Parallelogramm.

Durch diese 4 Geraden entstehen an jedem der vier Schnittpunkt auch vier Winkel.

Jetzt weiß man, dass es an Parallelen einige Winkelbeziehungen gibt, die man Stufenwinkel und Wechselwinkel nennt.



Daraus folgen hier viele Beziehungen. Zum Beispiel diese:

$\alpha_1 = \delta_2 = \gamma_3 = \beta_4$ (Stufenwinkel) usw.

$\gamma_1 = \gamma_3$ (Scheitelwinkel)

Also gilt auch $\alpha_1 = \gamma_3$ und analog dazu erhält man $\beta_1 = \delta_1$.

Für das Parallelogramm ABCD heißt dies:

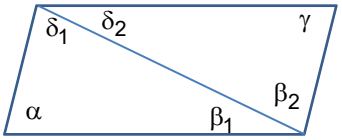
Gegenüber liegende Innenwinkel sind gleich groß.

Weil $\beta_1 + \beta_4 = 180^O$ und außerdem $\beta_4 = \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 + b_1 = 180^O$

Für das Parallelogramm ABCD heißt dies:

Nebeneinander liegende Innenwinkel haben zusammen 180°.

Ein Viereck hat zwei Diagonalen. Jede zerlegt das Vierecke in zwei Dreiecke. In jedem Dreieck ist die Winkelsumme 180°.



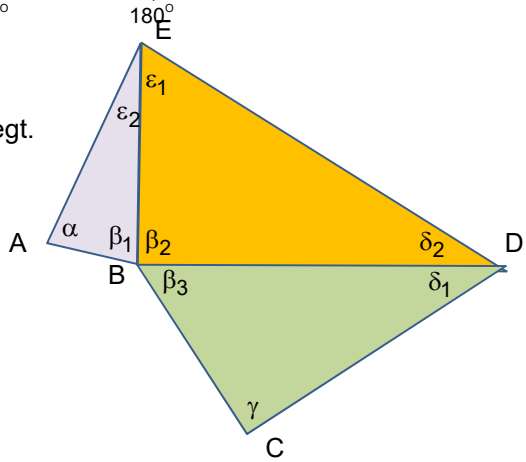
Daraus kann man folgern, dass die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt

Beweis: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha + (\beta_1 + \beta_2) + \gamma + (\delta_1 + \delta_2) = \underbrace{(\alpha + \beta_1 + \delta_1)}_{180^o} + \underbrace{(\beta_2 + \gamma + \delta_2)}_{180^o} = 360^O$

Aufgabe:

Ein **Fünfeck** wird durch zwei Diagonalen in drei Dreiecke zerlegt. Berechne die Winkelsumme im Fünfeck.

Wie groß wird sie wohl in einem Sechseck sein?



Lösung:

Die Winkelsumme in den drei Teildreiecken ist jeweils 180°. Daraus folgt:

$$\underbrace{\overbrace{\alpha+\beta_1+\varepsilon_2}^{\Delta\,ABE}}_{180^{\circ}}+\underbrace{\overbrace{\beta_2+\delta_2+\varepsilon_1}^{\Delta\,BDE}}_{180^{\circ}}+\underbrace{\overbrace{\beta_3+\gamma+\delta_1}^{\Delta\,BCD}}_{180^{\circ}}=3\cdot 180^{\circ}=540^{\circ}$$

Ein Sechseck zerlegt man in 4 Teildreiecke, also ist die Winkelsumme $4\cdot 180^{\circ}=720^{\circ}$.

Allgemein gilt: In einem n-Eck beträgt die Winkelsumme $(n-2)\cdot 180^{\circ}$

3.2 Besondere Parallelogramme:

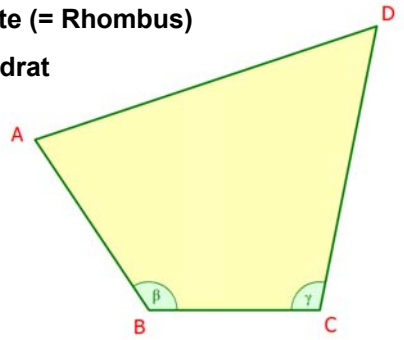
Wenn es vier gleich große Winkel besitzt: **Rechtecke**

Dann hat jeder Winkel $360^{\circ}:4=90^{\circ}$.

Wenn zudem alle Seiten gleich lang sind: **Quadrat**

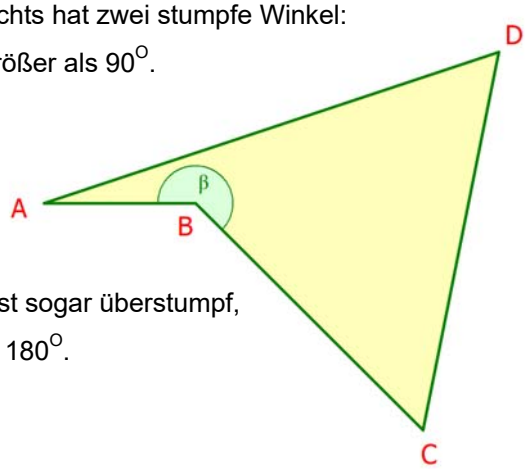
Wenn es vier gleiche lange Seiten besitzt: **Raute (= Rhombus)**

Wenn zudem alle Winkel gleich groß sind: **Quadrat**



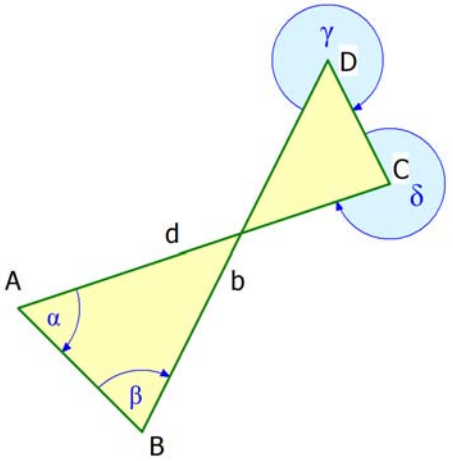
3.3 Stumpfe und überstumpfe Vierecke

Das Viereck rechts hat zwei stumpfe Winkel:
β und γ sind größer als 90°.



Der Winkel β ist sogar überstumpf,
also größer als 180°.

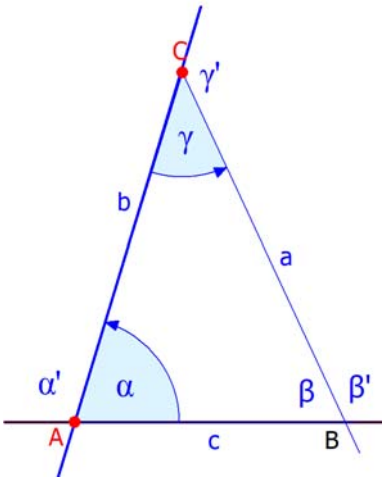
Überschlagenes Viereck:



<u>Dieses Viereck ist irregulär</u> und wird gemeinhin nicht betrachtet oder untersucht. Ich habe die vier Eckenwinkel unter dem Gesichtspunkt eingezeichnet, dass man den einen Schenkel im Uhrzeigersinn auf den anderen dreht. Dadurch erkennt man, dass γ und δ zu Außenwinkeln werden, obwohl sie innen liegen sollten. Die Winkelsumme wird so zum Problem.

Und die Seiten b und d schneiden sich hier in einem Punkt, der kein Eckpunkt des Vierecks ist.

Die Lösung zu den Übungen von Seite 8.



1.) Gegeben sind $\alpha = 73^{O}$ und $\gamma = 42^{O}$.

Dann ist $\beta = 180^{O} - \alpha - \gamma = 180^{O} - 73^{O} - 42^{O} = 65^{O}$.

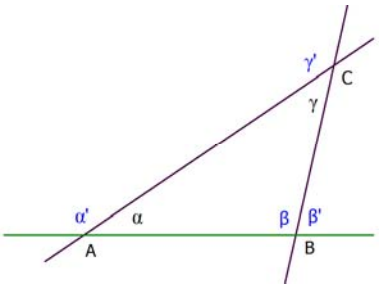
Außenwinkel:

$\alpha' = \beta + \gamma = 107^{O}$ oder $\alpha' = 180^{O} - \alpha = 180^{O} - 73^{O} = 107^{O}$

$\beta' = \alpha + \gamma = 115^{O}$ oder $\beta' = 180^{O} - \beta = 115^{O}$

$\gamma' = \alpha + \beta = 138^{O}$ oder $\gamma' = 180^{O} - \gamma = 138^{O}$

Summe der Außenwinkel: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^{O}$



2.) Gegeben sind $\gamma = 43{,}2^{O}$ und $\beta = 102{,}7^{O}$.

Dann ist $\alpha = 180^{O} - \beta - \gamma = 180^{O} - 102{,}7^{O} - 43{,}2^{O} = 34{,}1^{O}$.

Außenwinkel:

$\alpha' = \beta + \gamma = 145{,}9^{O}$ oder $\alpha' = 180^{O} - \alpha = 180^{O} - 34{,}1^{O} = 145{,}9^{O}$

$\beta' = \alpha + \gamma = 77{,}3^{O}$ oder $\beta' = 180^{O} - \beta = 77{,}3^{O}$

$\gamma' = \alpha + \beta = 136{,}8^{O}$ oder $\gamma' = 180^{O} - \gamma = 136{,}8^{O}$

Summe der Außenwinkel: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^{O}$